Communications Numériques

TD 4 - Transmission en bande de base

Exercice 4.1. Modulation d'Impulsions en Amplitude (MIA)

Le signal numérique en bande de base est caractérisé par la relation :

$$s(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$$

où les symboles a_k prennent des valeurs réelles dans un alphabet $\mathcal{M}$, $h(t)$ la réponse impulsionnelle d'un filtre réel à énergie finie et $\frac{1}{T_s}$ le débit d'émission de symboles.

- Représenter une trajectoire comportant 6 symboles pris dans l'alphabet $\mathcal{M} = \{-7A, -5A, -3A, -A, +A, +3A, +5A, +7A\}$ (A est une amplitude quelconque) avec un filtre de réponse impulsionnelle :

$$h(t) = rect\left(\frac{t - \frac{T_s}{2}}{T_s}\right).$$

Nous supposons que les symboles a_k sont obtenus après un étiquetage d'une séquence binaire provenant de la source d'information. Cet étiquetage est basé sur un codage de Gray.

- Constellation des symboles : Représentez les symboles de $\mathcal{M}$ sur l'axe des réels et reportez-y les les mots binaires correspondants par codage de Gray.
  - Quelle est la distance minimale entre symboles de la constellation.
- Exprimez la relation entre le débit d'information (débit binaire) et le débit symbole.

solution :

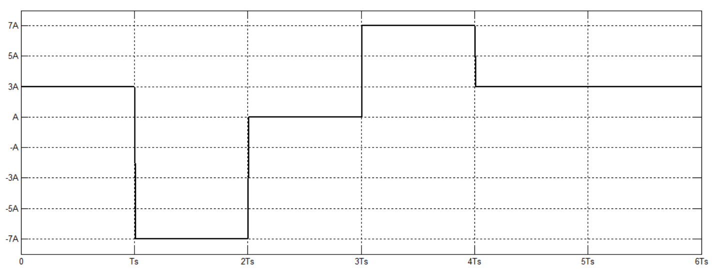

FIGURE 1 –

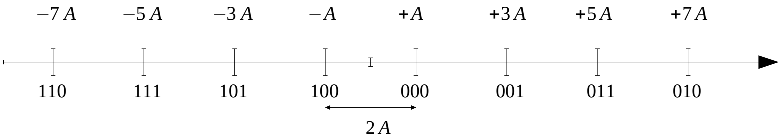

FIGURE 2 –

$D_s = \frac{D_b}{\log_2(M)} = \frac{D_b}{m} = \frac{D_b}{3}$.

Exercice 4.2. Codes en ligne sans mémoire

Soit une transmission en bande de base d'un signal numérique $s(t)$.

— Précisez l'alphabet des signaux, le filtre $h(t)$ et représentez $s(t)$ pour la séquence binaire "011001" dans les cas suivants :
  — $s(t)$ est un code en ligne de type NRZ polaire,
  — $s(t)$ est un code en ligne de type NRZ unipolaire,
  — $s(t)$ est un code en ligne de type RZ polaire.

solution :

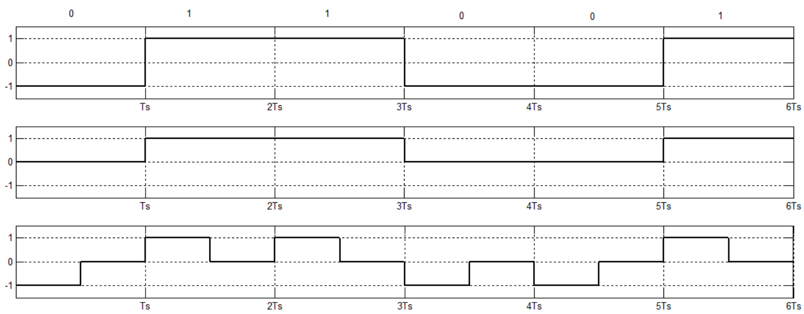

FIGURE 3 – De haut en bas : NRZ polaire, NRZ unipolaire, RZ polaire.

avec :

pour NRZ polaire : alphabet des signaux $\{-A, +A\}$,et un filtre rectangulaire $h(t) = rect\left(\frac{t-T_s/2}{Ts}\right)$

pour NRZ unipolaire : alphabet des signaux $\{0, +A\}$,et un filtre rectangulaire $h(t) = rect\left(\frac{t-T_s/2}{Ts}\right)$

pour RZ polaire : alphabet des signaux $\{-A, +A\}$,et un filtre rectangulaire $h(t) = rect\left(\frac{t-T_s'/2}{T's}\right)$ où $T_s' < T_s$. Sur le tracé de la figure 3, $T_s' = \frac{T_s}{2}$

Exercice 4.3 Code en ligne à mémoire

Considérons maintenant un code NRZI (Non Retour à Zéro Inversé) : Le filtre étant une réponse rectangulaire NRZ, l'arrivée d'un bit "0" ne provoque aucune transition de polarité alors que l'arrivée du bit "1" en provoquera une.

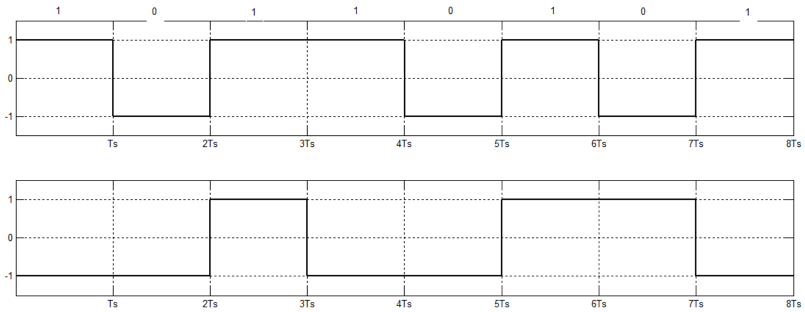

FIGURE 4 – Codes NRZ (en haut) et NRZI (en bas) pour la séquence d'information "10110101. L'état du codeur pour ce dernier est initialisé à +1.

On peut réaliser ce code en ligne dans le domaine binaire. En effet soit α_k le bit à l'instant kT_b, on crée ainsi l'élément binaire β_k par codage différentiel de la manière suivante :

$$\beta_k = \beta_{k-1} \oplus \alpha_k,$$

et appliquer ensuite un étiquetage classique bijectif :

$$\beta_k = 1 \leftrightarrow a_k = +A,$$

$$\beta_k = 0 \leftrightarrow a_k = -A.$$

- Exprimez $P(\beta_k \,|\beta_{k-1})$.
- Représenter le codage NRZI comme une chaîne de Markov en précisant ses paramètres.

solution :

- $P(\beta_k \,|\beta_{k-1}) = P(\alpha_k)$
- Soit la séquence $\{\beta_k\}$ produite par codage différentiel. C'est cette séquence qui sera émise au lieu de $\{\alpha_k\}$. D'après la relation $\beta_k = \beta_{k-1} \oplus \alpha_k$, l'élément β_k dépend de β_{k-1} et de α_k. Comme modèle on dira que la séquence $\{\beta_k\}$ est une séquence d'états, ici binaires, c'est-à-dire qu'un état prend deux valeurs possibles. Un état à un instant kT_b peut être exprimé en fonction de l'état directement précédent seulement et n'a pas besoin de la connaissance des autres états antérieurs. Cette relation est obtenue à α_k près, considéré comme un bruit aléatoire de distribution $P(\alpha_k)$. La probabilité $P(\beta_k \,|\beta_{k-1}, \beta_{k-2}, \cdots, \beta_0)$ est entièrement résumée et est égale à $P(\beta_k \,|\beta_{k-1})$. Cette relation définit une chaîne de Markov qui peut être représentée graphiquement par le schémas suivant :

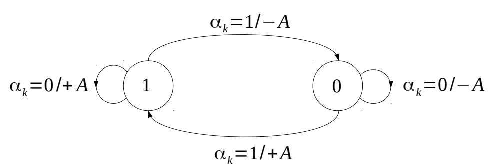

FIGURE 5 –

TD 5 - Transmission en bande transposée

Exercice 5.1. Les modulations linéaires sans mémoire.

Les modulations linéaires en bande transposée et sans mémoire s'expriment à partir du signal numérique complexe $s(t)$ en bande de base de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re e\left\{s(t)\exp\left(2j\pi f_0 t\right)\right\}, \\ &= \Re e\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k h(t-kT_s)\,\exp\left(2j\pi f_0 t\right)\right\}. \end{aligned}$$

— Que représentent d_k, f_0 et T_s dans cette formule.
— Ré-exprimez $x(t)$ pour chacun des formats suivants, de manière à justifier la dénomination de chacun d'eux :
  — *ASK* (*Amplitude Shift Keying*)
  — *QAM* (*Quadrature Amplitude Modulation*)
  — *PSK* (*Phase Shift Keying*)
— Représenter la constellation des signaux d'une 4-ASK (polaire) , 8-PSK, et d'une 16-QAM.
— Reportez-y les mots binaires correspondants par codage de Gray.
— Soit un débit binaire de D_b =9.6 Kbits/s à transmettre. Quel est le débit symbole correspondant pour chacune des modulations ci-dessus ?
— Soit un filtre $h(t)$ tel que la bande du signal émis est de $1.5D_s$. Si la bande de canal allouée est de 5 KHz, quelles modulations parmi ces 3 seraient à proscrire ?

solution :

— d_k est le symbole émis à l'instant kT_s, f_0 est la fréquence porteuse et T_s le temps séparant deux symboles consécutifs.
— ASK : c'est une modulation de l'amplitude d'un cosinus donc monodimensionnelle. On ne considérant que des symboles réels on a :

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h(t-kT_s)\,\cos\left(2\pi f_0 t\right) = s(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right).$$

— QAM : C'est une modulation en amplitude de deux porteuses en quadrature. En posant $d_k = a_k + jb_k$ et $a(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h(t-kT_s)$ et $b(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k h(t-kT_s)$ on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h(t-kT_s)\,\cos\left(2\pi f_0 t\right) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k h(t-kT_s)\,\sin\left(2\pi f_0 t\right), \\ &= a(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right) - b(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right). \end{aligned}$$

— PSK : C'est une modulation par déplacement de phase. Pour l'obtenir il faut prendre des symboles répartis symétriquement sur un cercle donc $\|d_k\| = A$ et $\varphi_k = \arg(d_k)$ sans oublier que $h(t)$ est réel.

$$x(t) = A\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(t-kT_s)\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi_k\right)$$

On voit aussi, avec l'apparition du terme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(t-kT_s)$ en amplitude, que la PSK n'est généralement pas à enveloppe constante! Ceci a un impact sur les performances lorsqu'un amplificateur non linéaire est utilisé dans la chaîne de transmission.

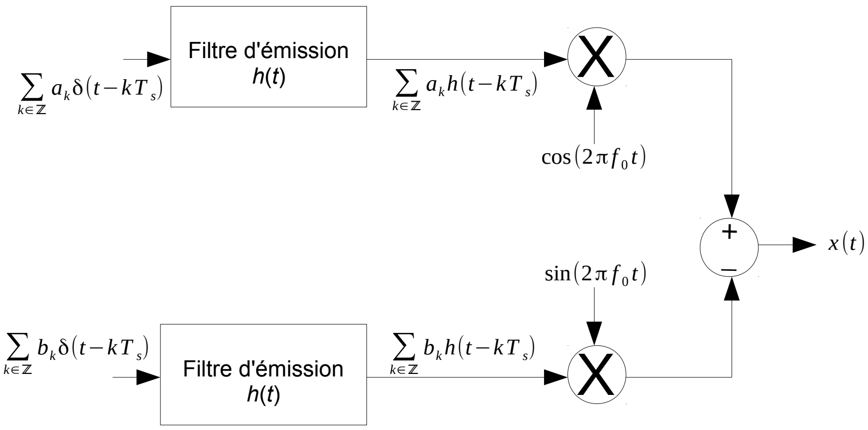

FIGURE 6 –

- Constellation + codage de Gray (voir poly cours)
  - **Remarque : Rappeler que 2-ASK et 2-PSK (ou BPSK) est la même modulation ainsi que 4-QAM et 4-PSK (ou QPSK) est la même modulation.**
- 4-ASK : $D_s = \frac{9600}{2} = 4800$ bauds ; 8-PSK : $D_s = \frac{9600}{3} = 3200$ bauds ; 16-QAM : $D_s = \frac{9600}{4} = 2400$ bauds.
- 4-ASK : $1.5D_s = 7200$ Hz $>$ 5000 Hz ; 8-PSK : $1.5D_s = 4800$ Hz $<$ 5000 Hz ; 16-QAM : $1.5D_s = 3600$ Hz $<$ 5000 Hz . 4-ASK à proscrire.

Exercice 5.2. La modulation de fréquence binaire à phase continue, *MSK*

D'abord reconsidérons la modulation de fréquence à phase discontinue. C'est une modulation sans mémoire.

- Formulez cette modulation pour une *FSK* (*Frequency Shift Keying*) binaire en faisant intervenir la déviation de fréquence Δf.
- Exprimez la fréquence instantanée aux instants $kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$.

Soit maintenant le signal numérique $s(t) = \frac{\Delta f}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} a_n h(t-nT_s)$ avec a_n prenant les valeurs dans l'ensemble $\mathcal{M} = \{-1, +1\}$, et $h(t) = rect\left(\frac{t-T_s/2}{T_s}\right)$. Ce signal est à l'entrée d'un Oscillateur Commandé en Tension (OCT). La sortie de l'OCT est un signal sinusoïdale de fréquence f_0 et de phase instantanée :

$$\varphi_i(t) = 2\pi \int_0^t s(u)du.$$

- Pour $kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$ calculez cette phase instantanée.
- Vérifiez la continuité de la phase aux instants kT_s.
- Dans une *MSK* (*Minimum Shift Keying*) $\Delta f = 0.5T_s$. Quelles sont les valeurs de la phase instantanée aux instants kT_s.
- Tracez le digramme des phases.

solution :

- $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + a_k \pi \Delta f\, t)$ avec $a_k \in \{-1, +1\}$.

— La fréquence instantanée aux instants $kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$ est $f_i(t) = f_0 + a_k \frac{\Delta f}{2}$; les deux fréquences transmises sont donc $f_0 + \frac{\Delta f}{2}$ et $f_0 - \frac{\Delta f}{2}$, elles sont donc bien séparées de la déviation Δf. Notons la dicontinuité de la phase aux instants kT_s.

— Pour $kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$:

$$\begin{aligned}
\varphi_i(t) &= 2\pi \int_0^t s(u)du, \\
&= 2\pi \int_0^t \frac{\Delta f}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} a_n h(u - nT_s)du, \\
&= \pi \Delta f \sum_{n=0}^{k-1} a_n \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} h(u - nT_s)du + \pi \Delta f \int_{kT_s}^{t} a_k h(u - kT_s)du, \\
&= \pi \Delta f\, T_s \sum_{n=0}^{k-1} a_n + \pi \Delta f\, a_k(t - kT_s).
\end{aligned}$$

Le signal s'écrit alors : $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + a_k \pi \Delta f\, (t - kT_s) + \pi \Delta f\, T_s \sum_{n=0}^{k-1} a_n)$. On voit bien l'effet de mémoire dans le terme $\sum_{n=0}^{k-1} a_n$ qui fait intervenir tous les symboles passés dans la phase du signal.

— pour le symbole a_{k-1} (entre $(k-1)T_s \leq t \leq kT_s$) on a:

$$\begin{aligned}
\varphi_i(t) &= \pi \Delta f\, T_s \sum_{n=0}^{k-2} a_n + \pi \Delta f\, a_{k-1}(t - (k-1)T_s), \\
\varphi_i(kT_s) &= \pi \Delta f\, T_s \sum_{n=0}^{k-2} a_n + \pi \Delta f\, T_s a_{k-1}, \\
&= \pi \Delta f\, T_s \sum_{n=0}^{k-1} a_n.
\end{aligned}$$

pour le symbole a_k (entre $kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$) on a:

$$\begin{aligned}
\varphi_i(t) &= \pi \Delta f\, T_s \sum_{n=0}^{k-1} a_n + \pi \Delta f\, a_k(t - kT_s), \\
\varphi_i(kT_s) &= \pi \Delta f\, T_s \sum_{n=0}^{k-1} a_n.
\end{aligned}$$

d'où la continuité de la phase aux instants kT_s.

— Pour une MSK ($\Delta f = 0.5T_s$) la phase aux instants kT_s est égale à $\varphi_i(kT_s) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{k-1} a_n$. Sachant que $a_n \in \{-1, +1\}$ la phase prend alors des valeurs multiples de aux instants kT_s.

— En supposant une initilisation de la phase à 0 on peut tracer le diagramme des phases suivants:

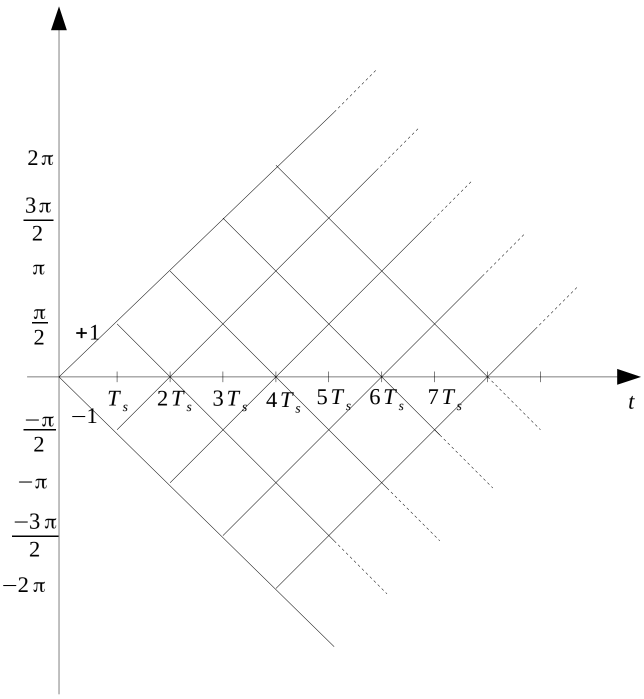

Figure 7 –

Pour la transmission des bits 100111000, c'est à dire des symboles $+1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, -1$ la phase **évolue de manière continue** dans le temps suivant le tracé en gras reporté sur le digramme des phases.

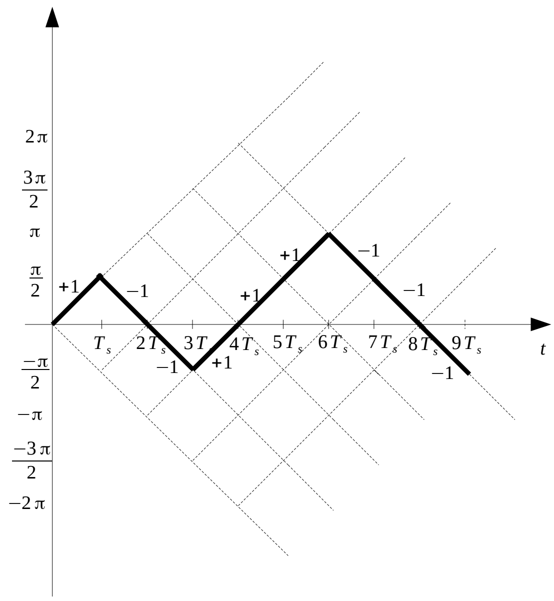

Figure 8 –